Tutorato Algebra Lineare - 27/03/25

CAMBIO DI BASE (e inversione di matrici 2×2)

Riprendiamo l'Esercizio 4 del Foglio 2.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio delle polinomi reali di grado ≤ 2 e sia $\rho : \underbrace{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}_{V} \to \mathbb{R}^2$ la mappa

$$f \mapsto \rho(f) := \begin{bmatrix} f(0) + f(1) \\ f(0) + 2f(1) \end{bmatrix}.$$

√ *a*) Verificare che ρ è un'applicazione lineare.

√ *b*) Determinare una base di Ker(ρ).

√ *c*) Scrivere la matrice di ρ rispetto alle basi standard $(1, x, x^2)$ e $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$.

] svolti nel Tutorato precedente (21/03)

→ *d* Scrivere la matrice di ρ rispetto alle basi $(1, (1+x), (1+x)^2)$ e $\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$.

Abbiamo visto $\quad \operatorname{Ker}\rho = \operatorname{Span}(x^2 - x)$.

Rivediamo il punto c).

$\mathcal{E} = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$

c) La matrice associata a ρ rispetto alle basi $1, x, x^2$ di V e $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$ di $\mathbb{R}^2$ è data da

$$\left([\rho(1)]_{\mathcal{E}} \,,\, [\rho(x)]_{\mathcal{E}} \,,\, [\rho(x^2)]_{\mathcal{E}} \right)$$

→ coordinate di $\rho(1)$ rispetto alla base $\mathcal{E}$

Abbiamo

cioè

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 + 1 \\ 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 0 + 1 \\ 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(x^2) = \begin{pmatrix} 0 + 1 \\ 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice cercata è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cosa rappresenta?

Se consideriamo un polinomio $a+bx+cx^2$ in V, le sue coordinate nella base $1, x, x^2$ sono $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Per calcolare $\rho(a+bx+cx^2)$, basta calcolare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+c \\ 3a+2b+2c \end{pmatrix}.$$

Il risultato è il vettore che ha come entrate le coordinate di $\rho(a+bx+cx^2)$ nella base canonica $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$

OSS. Poiché ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è del tipo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, cioè è già scritto in coordinate rispetto alla base canonica, in questo caso il risultato precedente È PROPRIO $\rho(a+bx+cx^2)$. Questa affermazione sarà più chiara dopo aver studiato il punto d).

d) Detta $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, la matrice richiesta è

$$A = \left([\rho(1)]_{\mathcal{B}} \;,\; [\rho(1+x)]_{\mathcal{B}} \;,\; [\rho((1+x)^2)]_{\mathcal{B}} \right).$$

Prima di tutto: cosa rappresenta?

scritto in coordinate nella base $1, 1+x, (1+x)^2$

→ Se abbiamo un polinomio $a \cdot 1 + b \cdot (1+x) + c \cdot (1+x)^2$, il prodotto $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ restituisce un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, che rappresenta le coordinate di $\rho(a+b(1+x)+c(1+x)^2)$ nella base $\mathcal{B}$, cioè $\rho(a+b(1+x)+c(1+x)^2) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quindi, stiamo cambiando base in partenza e in arrivo.

<u>Esempio</u>. 1) Consideriamo il polinomio $1 + (1+x)^2 = 2 + 2x + x^2$.

→ Nella base $1, (1+x), (1+x)^2$ di V è rappresentato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

→ Nella base $1, x, x^2$ di V è rappresentato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Consideriamo il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$.

→ Nella base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ è rappresentato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

perché $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

→ Nella base canonica di $\mathbb{R}^2$ è rappresentato da "se stesso", perché $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Allora come si determina la matrice richiesta?

$c\frac{1}{2}$) Determiniamo la matrice associata a ρ nelle basi $1, x, x^2$ di V e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$, cioè:

$$\Big([\rho(1)]_{\mathcal{B}} , [\rho(x)]_{\mathcal{B}} , [\rho(x^2)]_{\mathcal{B}} \Big).$$

Cominciamo con il primo:

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\rho(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo trovare a e b. Come? Risolvendo il sistema

$$a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad \text{cioè}\quad \begin{pmatrix}a-b\\a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Sappiamo farlo! Una volta fatto per $p(1)$, dovremo farlo anche per $p(x)$ e $p(x^2)$. (anche se in realtà ne basta uno perché $p(x)=p(x^2)$)

Osserviamo che il sistema precedente può essere scritto in forma matriciale come

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}_{[p(1)]_{\mathcal{B}}}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Cioè come $M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, con M invertibile.

$$\det M=\det\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=1-(-1)=2\neq 0$$

Se conosciamo M^{-1}, allora

$$\underbrace{M^{-1}\cdot M}_{I}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=M^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

OSS. Se conosciamo M^{-1}, possiamo risolvere anche il caso di $p(x)$ e $p(x^2)$: procedendo come prima troviamo:

$$[p(x)]_{\mathcal{B}}=\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}=M^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

verificare per credere!

OSS. Per risolvere l'esercizio, basterebbe risolvere i tre (in realtà due) sistemi lineari.
Seguiamo questa strada per due ragioni:

1) È più generale: le coordinate di $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono date da $M^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, quindi con M^{-1} tutte le domande si riducono a un calcolo matrice per vettore.

2) Ci alleniamo con il calcolo di matrici inverse!

- INTERMEZZO: calcolo della matrice inversa.

Come si calcola $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$?

Ci sono (almeno) due strade:

1) $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} \tilde{M}$, dove

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{array}{cc} j & \\ \left(\qquad\right) & i \end{array}$$

matrice ottenuta da M cancellando la RIGA i e la COLONNA j

Nel nostro caso:

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{1} & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 1 & \cancel{1} \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} \cancel{1} & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & \cancel{-1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} = 1$$

Quindi

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2) Algoritmo di Gauss [EXTRA TUTORATO]

$$\left(M \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) \xrightarrow{\text{Trasf. elementari}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; M^{-1} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2} R_2} \left(\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{matrix}}_{M^{-1}} \right).$$

Fine intermezzo.

Ora che abbiamo M^{-1}, possiamo calcolare

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

coordinate di $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ nella base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ (-1)\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Cioè:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad [p(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Per gli altri?

$$p(x) = p(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

quindi $\quad [p(x)]_{\mathcal{B}} = [p(x^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$

Quindi la matrice associata a ρ nelle basi $1, x, x^2$ di V e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ è data da:

$$\left([\rho(1)]_{\mathcal{B}}, [\rho(x)]_{\mathcal{B}}, [\rho(x^2)]_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

<u>Esempio</u> (Ancora: cosa rappresenta questa matrice?)

Consideriamo il polinomio $x^2+2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2$.

→ in coordinate (nella base $1, x, x^2$ di V) si scrive come

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\rho(x^2+2x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Invece, se calcoliamo

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3+3/2 \\ 0+1+1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Troviamo le coordinate di $\rho(x^2+2x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. In effetti:

$$\rho(x^2+2x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{9}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

COERENZA:

Se volessimo le coordinate di $p(x^2+2x)=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$, allora, dovremmo calcolare
come visto prima

$$M^{-1}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad M^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

In effetti si ha:

$$\begin{pmatrix}9/2\\3/2\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\underbrace{M^{-1}\begin{pmatrix}2&1&1\\3&2&2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}5/2&3/2&3/2\\1/2&1/2&1/2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Verificare per credere!

Cioè, la matrice associata a p nelle basi $1, x, x^2$ di V e $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ è data da

$$\underbrace{M^{-1}}_{\text{"}M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id)\text{"}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&1\\3&2&2\end{pmatrix}}_{\text{"}M^{\{1,x,x^2\}}_{\mathcal{E}}(p)\text{"}}$$

cambio di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$

canonica

matrice associata a p rispetto a $1, x, x^2$ di V e $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$

Es. Calcoliamo le coordinate del vettore $\rho(x^2+1)$ nella base $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$

$x^2+1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ nella base $1, x, x^2$ di V

Le coordinate cercate sono

$$\begin{pmatrix}5/2 & 3/2 & 3/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/2+3/2\\ 1/2+1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

Per un polinomio generico $a+bx+cx^2$?

Uguale! Sono date da

$$\begin{pmatrix}5/2 & 3/2 & 3/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/2\,a + 3/2\,b + 3/2\,c\\ 1/2\,a + 1/2\,b + 1/2\,c\end{pmatrix}.$$

d) Conclusione dell'esercizio.

Scrivere la matrice di ρ rispetto alle basi

$1, 1+x, (1+x)^2$ di V e $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ di $\mathbb{R}^2$

Basta solo calcolare $[\rho(1)]_{\mathcal{B}}$, $[\rho(1+x)]_{\mathcal{B}}$, $[\rho((1+x)^2)]_{\mathcal{B}}$.

Scriviamo 1, $1+x$, $(1+x)^2$ in coordinate nella base $1, x, x^2$:

$$1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad 1+x \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad (1+x)^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Quindi
$$[\rho(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$[\rho(1+x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2+3/2 \\ 1/2+1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$[\rho((1+x)^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e quindi la matrice cercata è:
$$\begin{pmatrix} 5/2 & 4 & 7 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>OSS.</u> (FINALE) Per determinare la matrice
$$\begin{pmatrix} 5/2 & 4 & 7 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
abbiamo applicato $\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In effetti la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rappresenta il cambio di base da $1, 1+x, (1+x)^2$ a $1, x, x^2$

$$a + b(1+x) + c(1+x)^2 = (a+b+c)1 + (b+2c)x + c\,x^2$$
e
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+2c \\ c \end{pmatrix}$$

In particolare, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 4 & 7 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

È esattamente il calcolo che abbiamo fatto prima, ma scritto "in più colonne".

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 4 & 7 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mettendo tutto insieme:

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 4 & 7 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{\|\ \text{visto prima}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5/2 & 4 & 7 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{M^{\{1,1+x,(1+x)^2\}}_{\mathcal{B}}(\rho)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{M^{e}_{\mathcal{B}}(id)} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{M^{\{1,x,x^2\}}_{e}(\rho)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M^{\{1,1+x,(1+x)^2\}}_{\{1,x,x^2\}}(id)}$$

$M^{\{1,1+x,(1+x)^2\}}_{\mathcal{B}}(\rho)$ ↓ matrice che rappresenta ρ rispetto alle basi $1, 1+x, (1+x)^2$ di V, $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$

$M^{e}_{\mathcal{B}}(id)$ ↓ cambio di base $e \rightarrow \mathcal{B}$ (e: canonica)

$M^{\{1,x,x^2\}}_{e}(\rho)$ ↓ matrice che rappresenta ρ rispetto alle basi $1, x, x^2$ di V, e di $\mathbb{R}^2$

$M^{\{1,1+x,(1+x)^2\}}_{\{1,x,x^2\}}(id)$ → cambio di base $\{1, 1+x, (1+x)^2\} \downarrow \{1, x, x^2\}$

Il tutto si traduce così:

1. Polinomio $f \in V$ scritto in coordinate rispetto alla base
$1,\ 1+x,\ (1+x)^2$

2. Scrivo f in coordinate rispetto alla base $1, x, x^2$

3. Applico p, ottengo le coordinate di $p(f)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$

4. Cambio base, ottengo le coordinate di $p(f)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, bend left, "\text{moltiplico per } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[ddd, bend right=60, "\text{moltiplico per } \begin{pmatrix} 5/2 & 4 & 7 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}"'] \\
2 \arrow[d, bend left, "\text{moltiplico per } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}"] \\
3 \arrow[d, bend left, "\text{moltiplico per } \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}"] \\
4
\end{tikzcd}$$

" Fare $1 \to 4$ è come fare $1 \to 2 \to 3 \to 4$. "